CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Profilul servicii resurse naturale și protecția mediului.

Profilul real specializarea științele naturii.

Profilul tehnic

Faza locală, 5 martie 2016

Clasa a X-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Calculaţi media aritmetică a numerelor $a = 3^{1+\log_3 7} - 2^{\log_4 121}$ şi $b = 3^{\log_2 5} - 5^{\log_2 3}$.

Barem

$3^{1+\log_3 7} = 3 \cdot 3^{\log_3 7} = 21$………………………………………………….. (2p)

$2^{\log_4 121} = 2^{\frac{\log_2 121}{2}} = 2^{\log_2 \sqrt{121}} = 11$……………….……………………… (2p)

$3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$ (logaritmând) ………………………………………………….(2p)

$a = 10, b = 0, m_a = 5$ ………………………………………………………… (1p)

Subiectul 2 (7 puncte)

a) Fie $z = \dfrac{1-2i}{1+i}$. Calculaţi $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)$ şi $|z|$.

b) Determinaţi valorile lui $m \in \boldsymbol{R}$ pentru care ecuaţia $z^2 - (4m + i)z + 2mi + m + 3 = 0$ are o soluţie reală, apoi rezolvaţi ecuaţia în fiecare dintre situaţiile găsite.

Barem

a) $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i$, $\operatorname{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = -\dfrac{3}{2}$, $|z| = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ……………...…………(4p)

b) Fie $x_0 \in R$ o soluţie a ecuaţiei.Atunci $x_0^2 - (4m + i)x_0 + 2mi + m + 3=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_0^2 - 4mx_0 + m + 3 = 0 \\ 2m - x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4m^2 - m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1$ sau $m = -\dfrac{3}{4}$. ………………(1p)

Pentru $m = 1$ $\Rightarrow z_1 = 2$; $z_2 = 2 + i$ ……………………………………………….(1p)

Pentru $m = -\frac{3}{4} \Rightarrow z_1=-\frac{3}{2}$; $z_2=-\frac{3}{2}+i$……………………………………….….…..(1p)

Subiectul 3 (7 puncte)

a) Fie $a = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ şi $b = \sqrt{17}-\sqrt{11}$ .Fără a extrage rădăcina pătrată ,arătaţi că $a < b$.

b). Rezolvaţi în R ecuaţiile: i) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x}=3$.

ii) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

Barem

a) $a=\sqrt{18}-\sqrt{12}=\dfrac{6}{\sqrt{18}+\sqrt{12}}$, $b=\sqrt{17}-\sqrt{11}=\dfrac{6}{\sqrt{17}+\sqrt{11}}$ dar,

$\sqrt{18}+\sqrt{12}>\sqrt{17}+\sqrt{11} \Rightarrow a<b$…………………………………………..….(2p)

b)i) Cond. de existenţă $x \in [0;5]$…...……………………….………………….(1p)

$x \in \{1,4\}$…………………………….……...………….(2p)

ii) Ridicând la cub $\Rightarrow \sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{2x-3}=0 \Rightarrow$ $x \in \left\{1,\frac{3}{2},2\right\}$ soluţii care verifică ecuaţia iniţială……………………………………………………….……..(2p)

Subiectul 4 (7 puncte)

a) Fie numerele $a = \sqrt[3]{65}$ -4 şi b =4-$\sqrt[3]{63}$. Calculaţi cuburile acestor numere.

b) Fie $A = \sqrt[3]{1-12\sqrt[3]{65^2}+48\sqrt[3]{65}}+4$ şi $B = \sqrt[3]{1-48\sqrt[3]{63}+36\sqrt[3]{147}}+\sqrt[3]{63}$. Comparaţi numerele A şi B.

Barem

a) $a^3 = 65-12\sqrt[3]{65^2}+48\sqrt[3]{65}-64 = 1-12\sqrt[3]{65^2}+48\sqrt[3]{65}$. …..(1p)

$b^3 = 64-48\sqrt[3]{63^2}+36\sqrt[3]{147}-63 = 1-48\sqrt[3]{63}+36\sqrt[3]{147}$. …..(1p)

b) A=$\sqrt[3]{(\sqrt[3]{65}-4)^3}+4=\sqrt[3]{65}-4+4=\sqrt[3]{65}$ ....(2p)

B=$\sqrt[3]{(4-\sqrt[3]{63})^3}+\sqrt[3]{63}=4-\sqrt[3]{63}+\sqrt[3]{63}=4$ ....(2p)

$\Rightarrow$ A=$\sqrt[3]{65}>\sqrt[3]{64}=4=B$ ....(1p).